BONAVENTURA CAVALIERI
(1598-1647)

Par: André Ross
Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

Bonaventura Cavalieri était un mathématicien et un religieux italien né à Milan en 1598 et mort à Bologne le 3 décembre 1647. À l'âge de 7 ans il joignit les rangs des jésuates[1] à Milan. En 1616, il fut transféré au monastère jésuate de Pise. L'étude des ouvrages d'Euclide a éveillé son intérêt pour les mathématiques. Le cardinal Frederico Borromeo, ayant constaté le génie de Cavalieri lors de son séjour au monastère de Milan, le présenta à Galilée. Après cette rencontre, Cavalieri considéra qu'il était un disciple de l'astronome. Il étudia la géométrie et les mathématiques avec Benedetto Castelli qui enseignait à l'université de Pise. Il appliqua pour la chaire de mathématiques de l'université de Bologne en 1619, mais il fut jugé trop jeune pour un poste aussi prestigieux. Il tenta sa chance à l'université de Pise lorsque Castelli quitta pour Rome mais sa candidature ne fut pas retenue. En 1621, il fut nommé diacre et assistant du Cardinal Frederico Borromeo au monastère de Milan. Il y enseigna la théologie jusqu'en 1623 lorsqu'il devint prieur de Saint-Pierre à Lodi, une ville de Lombardie au nord de l'Italie. Son séjour à Lodi dura trois ans et en 1626, il se joignit au monastère jésuate de Parme jusqu'en 1629.

En 1629, il devint titulaire de la chaire de mathématiques de Bologne et il y enseigna les mathématiques jusqu'à sa mort en 1647. Ses travaux portent sur les mathématiques, l'optique et l'astronomie. Il fut en grande partie responsable de l'implantation rapide des logarithmes en Italie en publiant des tables qui contenaient les logarithmes des fonctions trigonométriques pour les astronomes. En 1632, il fit paraître un ouvrage intitulé *Directorium universale uranometricum.* Dans cet ouvrage, il donne des tables de rapports trigonométriques à huit décimales ainsi que leur logarithme. Lors de son arrivée à Bologne, il avait déjà conçu la *méthode des indivisibles* qui a joué un rôle important dans le développement du calcul intégral. Cette méthode était une variante de la *méthode d'exhaustion* utilisée par Archimède et qui incorporait la théorie des quantités géométriques infiniment petites de Kepler. La méthode des indivisibles fut présentée en 1635 dans son ouvrage *Geometria indivisibilis continuorum nova* (Traité des indivisibles). Dans cet ouvrage, il décrit sa méthode sans jamais définir clairement ce qu'il entend par indivisible.

1. Appelé également hiéronymite, ordre religieux, différent des jésuites mais que plusieurs auteurs confondent, qui avait Saint-Jérôme pour patron. Hiéronymite vient de « Hiéronymus », nom latin de Saint-Jérôme .

Il a également produit des articles sur les sections coniques, la trigonométrie, l'optique, l'astronomie et l'astrologie. Il a même publié des livres en astrologie, l'un en 1639 et l'autre en 1646. Ce fut son dernier ouvrage. Cavalieri a correspondu avec plusieurs mathématiciens dont Galilée, Mersenne, Torricelli et Viviani. Sa correspondance avec Galilée compte 112 lettres.

CALCUL D'AIRES

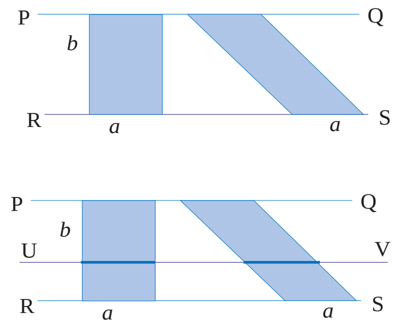
La méthode des indivisibles découlait d'une conception de la matière et du continu propre à certains philosophes scolastiques qui pensaient que la matière était composée de particules insécables ou atomes dont la nature diffère de celle de la matière. Dans cette conception la décomposition de la matière est limitée puisque celle-ci est constituée de ces particules. La méthode des indivisibles de Cavalieri se fonde sur cette conception de la matière. Pour lui une figure plane est constituée de lignes, un solide est constitué de plans et c'est la somme de ces indivisibles qui donne l'aire de la surface ou le volume du solide.

Dans son *Traité des Indivisibles* , Cavalieri conçoit une surface comme constituée par des droites parallèles équidistantes et un solide comme composé de plans parallèles équidistants. Le fondement de sa méthode pour les surfaces s'énonce comme suit :

THÉORÈME

Si deux figures planes sont comprises entre deux droites parallèles et si toutes les intersections de ces figures avec une droite parallèle aux deux premières ont même longueur, alors les figures planes ont même aire.

Pour bien saisir le sens de cet énoncé, illustrons comment il peut être utilisé pour comparer l'aire de deux figures planes. Considérons les deux figures planes que sont le rectangle et le parallélogramme de la figure suivante.



Ces deux figures sont incluses entre deux droites parallèles PQ et RS. Si on trace une droite UV quelconque parallèlement aux droites PQ et RS, les segments interceptés par cette droite sont tous deux de longueur a puisque des droites parallèles comprises entre deux parallèles ont même longueur. Ceci étant vrai pour toutes les droites que l'on peut tracer parallèlement à PQ et RS, il s'ensuit que l'aire du parallélogranmme est égale à l'aire du rectangle, soit $A = ab$. On peut énoncer ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

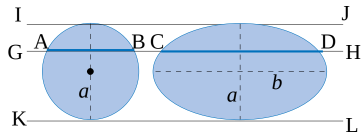
La méthode de Cavalieri peut être généralisée pour trouver l'aire de figures lorsque l'aire des indivisibles est dans un rapport donné :

THÉORÈME

Si deux figures planes ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.

Cavalieri semble avoir été inspiré par les travaux de Kepler pour trouver l'aire en comparant des figures dont des sections sont toujours dans un rapport donné. En effet, Kepler a, en particulier, trouvé l'aire d'une ellipse de façon analogue, voici comment :

Considérons une ellipse dont la demi-longueur du grand axe est b et dont la demi-longueur du petit axe est a. Considérons également un cercle de rayon a. Ces deux figures peuvent être comprises entre des lignes parallèles IJ et KL, la distance entre ces parallèles étant 2a.



En considérant une ligne GH parallèle aux droites IJ et KL, on détermine des segments AB et CD de telle sorte que la longueur de CD est toujours dans le rapport b/a, c'est-à-dire :

$$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{b}{a}\overline{\mathrm{AB}}$$

Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments ainsi déterminés, on peut conclure que l'aire de l'ellipse est dans le rapport b/a de l'aire du cercle. L'aire du cercle étant πa^2, celle de l'ellipse est :

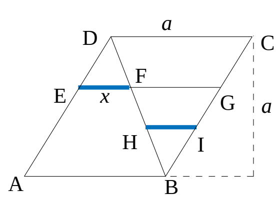
$$A = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$$

PUISSANCE DES LIGNES

Cavalieri a utilisé cette approche pour comparer ce qu'il appelle les *puissances des lignes* dans un parallélogramme. Ses résultats sont valides, mais sa démarche n'est pas très rigoureuse dans se fondements. Illustrons cette démarche en considérant le parallélogramme ABCD, divisé en deux par la diagonale DB. En traçant EG parallèlement aux bases, on détermine dans le triangle ADB l'indivisible EF. En posant $\overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{DE}}$, on détermine dans le triangle BCD l'indivisible HI qui est égal à l'indivisible EF. En comparant un à un les indivisibles du triangle ABD à ceux du triangle BCD, il montre que les deux triangles sont égaux. L'aire du parallélogramme étant la somme des indivisibles de chaque triangle, la somme des premières puissances de ligne d'un des triangles est la moitié de la somme des premières puissances de ligne du parallélogramme.

$$\Sigma a = 2\Sigma x = a^2$$

d'où :



Il a de cette façon comparé les deuxièmes et troisièmes puissances des lignes pour obtenir que la somme du carré des lignes du parallélogramme et celle des lignes du triangle sont dans le rapport 3 à 1, c'est-à-dire $\Sigma a^2 = 3\Sigma x^2$. Il montre également que le cube des lignes du parallélogramme et du triangle est dans le rapport 4 à 1, c'est-à-dire $\Sigma a^3 = 4\Sigma x^3$. À partir de ces résultats, il généralise pour la puissance $n^{\text{ième}}$ des lignes, ce qui donne :

$$\Sigma a^{n+1} = (n + 1)\Sigma x^n$$

En écriture moderne, sa conjecture est la suivante :

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} + k$$

Il a démontré ce résultat pour $n \leq 9$.

Ces résultats sont valides et utilisés de nos jours, mais la façon de les obtenir est très différentes de celel de Cavalieri.

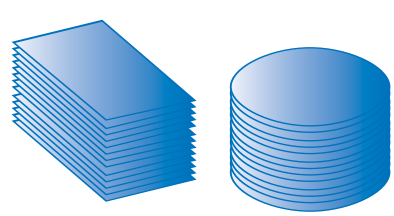
CALCUL DE VOLUMES

Cavalieri a utilisé la même approche pour calculer le volume de différents solides. Le principe des indivisibles s'énonce alors comme suit :

THÉORÈME

Si deux solides sont compris entre deux plans parallèles et si toutes les intersections de ces solides avec un plan parallèle aux deux premiers ont même aire, alors les solides ont même volume.

On peut illustrer la signification de ce théorème à l'aide d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre circulaire droit (figure ci-dessous). Le parallélépipède rectangle peut être conçu comme une pile de cartes rectangulaires alors que le cylindre peut être conçu comme une pile de cartes rondes. Si les piles ont même hauteur, (ou même nombre de cartes de même épaisseur), et si les cartes rondes ont la même aire que les cartes rectangulaires, les deux piles occupent des volumes égaux.



Or, le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois dimensions ou encore le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit :

$$V = Bh$$

Par sa méthode des indivisible, Cavalieri conclut alors que le volume du cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur. L'aire de cette base étant :

$$A = \pi r^2$$

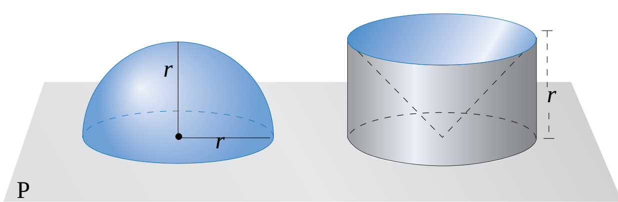
où r est le rayon de la base du cylindre. Le volume du cylindre est donc :

$$V = \pi r^2 h$$

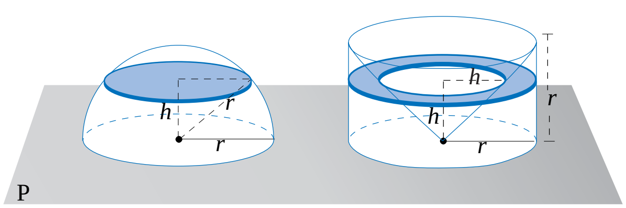
VOLUME DE LA SPHÈRE

Cavalieri a utilisé ce même principe pour calculer le volume d'une sphère et sa façon de procéder n'est pas sans rappeler celle d'Archimède.

Il a considéré une demi-sphère et un cylindre de rayon r et tel que la hauteur du cylindre soit égale au rayon r. Il a de plus imaginé que le cylindre était creusé en forme de cône inversé tel qu'illustré par la figure suivante.



Dans cette figure, les deux solides sont compris entre deux plans parallèles puisque la hauteur du cylindre est égale au rayon de la sphère. Imaginons maintenant un plan parallèle au plan P, coupant les deux solides, et dont la distance au plan P est égale à h. L'intersection de ce plan avec la demi-sphère donne un cercle et l'intersection avec l'autre solide donne un anneau.



Comparons l'aire du cercle et l'aire de l'anneau. Le rayon du cercle est un côté de l'angle droit du triangle rectangle dont un des côtés est h et l'hypoténuse est r.

Le rayon du cercle est donc :

$$R = \sqrt{r^2 - h^2}$$

et son aire est :

$$A = \pi\,(r^2 - h^2).$$

L'aire de l'anneau est obtenue en faisant la différence de l'aire du cercle extérieur et du cercle intérieur. Le cercle extérieur a même rayon que le cylindre et son aire est :

$$A_1 = \pi r^2.$$

Le rayon du cercle intérieur de l'anneau est h puisque le rayon et la hauteur du cône sont égaux. L'aire du cercle intérieur est donc :

$$A_2 = \pi h^2$$

et l'aire de l'anneau est :

$$A = A_1 - A_2 = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Quel que soit le plan sécant, son intersection avec la demi-sphère aura toujours même aire que son intersection avec le cylindre de creux conique.

Cavalieri en conclut donc que le volume de la demi-sphère est égal à la différence des volumes du cylindre et du cône.

Or, le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur r est

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^3$$

et le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur. Le volume de la demi-sphère est donc :

$$V_{s/2} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

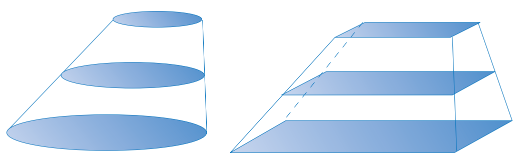
et le volume de la sphère est :

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dans cet exemple, les sections ont la même aire, mais la méthode peut également être utilisée lorsque les aires sont dans un même rapport. C'est ce qu'indique la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème de Cavalieri* et utilisée en stéréométrie, domaine de la géométrie qui a pour objet la mesure des solides naturels.

THÉORÈME

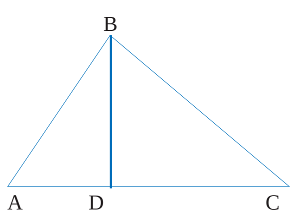
Si deux solides ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des plans parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les volumes des deux solides sont aussi dans le même rapport.

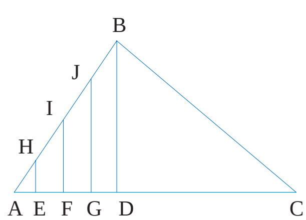


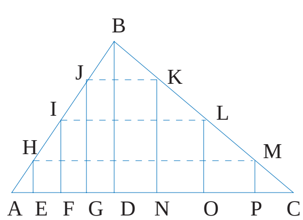
La méthode des indivisibles permet indéniablement d'obtenir des résultats qui sont conformes à la réalité dans certaines situations mais elle a été très critiquée pour son manque de rigueur.

MANQUE DE RIGUEUR

Plusieurs de ces critiques sont liées au fait que les indivisibles ne sont jamais clairement définis. Le suisse Paul Guldin (1577-1642) a présenté les plus sévères critiques, imaginant même un exemple illustrant que la méthode des indivisibles donne parfois des résultats erronés. Il montre que la méthode des indivisibles permet de conclure que dans un triangle ABC dont les côtés AB et BC sont inégaux, la hauteur BD divise le triangle en deux triangles de même aire. En effet, des coupes horizontales comme JK, IL et HM déterminent des segments indivisibles verticaux égaux deux à deux, les triangles ABD et BCD ont donc même aire.







En construisant ce paradoxe, Guldin montre que la méthode des indivisibles manque de rigueur. La critique de Guldin est analogue à celle présentée pour la méthode de la balance d'Archimède. Ce dernier était conscient que la méthode utilisée pouvait donner lieu à un résultat erroné et prenait soin de confirmer ce résultat par une démonstration en utilisant la *méthode d'exhaustion.*
La démarche de Cavalieri pour calculer le volume de la sphère était connue de Galilée car il l'utilise pour présenter un de ses paradoxes concenant l'infini ou plus spécifiquement sur la limite d'un processus. C'est par la bouche d'un des protagonistes de *Dialogues sur deux systèmes du monde* dans lequel il fait l'éloge du système héliocentrique copernicien, qu'il présente ce paradoxe. Salvati fait remarquer que l'anneau circulaire est égal au cercle. Cependant, à la limite, le cercle devient un point et l'anneau circulaire devient un cercle. Le rayon de la sphère étant arbitraire, on peut conclure que tous les cercles, quel que soit leur dimension, ont une circonférence égale et que chacune de ces circonférences est égale à un point. En réalité, ce ne sont pas les figures qui sont égales, mais la mesure de leur aire et la mesure de l'aire du point est nulle tout comme celle de la circonférence.

CONCLUSION

Les indivisibles de Cavalieri ayant suscité beaucoup de controverses et de sérieuses critiques, celui-ci tenta en vain de reformuler sa présentation pour répondre aux objections mais n'y est pas parvenu. Malgré ces controverses et le manque de fondement solide des résultats obtenus, d'autres mathématiciens ont utilisé des méthodes équivalentes à la méthode des indivisibles. Citons entre autres Roberval, Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent et Barrow. Les travaux de ces mathématiciens à l'aide de ces méthodes ont permis d'obtenir des résultats équivalents à l'intégration d'expressions comme x^n, $\sin\theta$, $\sin^2\theta$ et $\theta\sin\theta$.

La méthode des indivisibles a permis d'obtenir différents résultats corrects, mais la façon même dont étaient obtenus ces résultats laissait place à la critique parce que cette méthode pouvait aussi générer des résultats faux. Même si un grand nombre de résultats obtenus par une méthode sont vrais, cette méthode ne peut être acceptée comme méthode générale si certains résultats peuvent être faux et même les résultats qui sont vrais doivent être démontrés par une autre méthode si on veut pouvoir garantir leur validité. La méthode des indivisibles ne permettait pas d'offrir cette garantie. La méthode d'Archimède n'offrait pas cette garantie non plus, mais en scientifique, celui-ci prenait soin de démontrer ses résultats valides par une autre méthode.

Le lecteur doit certainement se poser les questions suivantes.

Qu'est-ce qui fait qu'une méthode est valable?

Qu'est-ce qui garantit qu'une méthode ne génère que des résultats vrais?

Comment peut-on savoir si une méthode qui donne des résultats valides dans toutes les situations où elle a été utilisée ne donnera pas dans des situations non encore traitées des résultats faux?

Pour établir la validité d'un procédé, il faut procéder déductivement à partir de fondements rigoureux. Tout procédé dont le fondement est inductif, c'est-à-dire basé sur l'accumulation de situations particulières dans lesquelles le procédé a produit des résultats corrects ne garantit jamais que le procédé restera fiable dans les situations qui n'ont pas encore été traitées.

BIBLIOGRAPHIE

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics*, New York, Dover Publications, Inc.,1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Kline, Morris. *Mathematical Thought fron Ancient to Modern Times,* New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc. 1958, 2 vol. 1 299 p.

Struik, David. *A Concise History of Mathematics,* New York, Dover Publications, Inc. 1967, 195 p.