SYSTÈMES DE NUMÉRATION : DU CONCRET À L'ABSTRAIT

INTRODUCTION

Les méthodes de numération se sont souvent développées en fonction des besoins des utilisateurs. Le propriétaire qui confiait une partie de son troupeau à un berger pour l'emmener dans les pâturages pour quelques mois, n'avait pas besoin de savoir compter au sens moderne du terme pour s'assurer que le berger rapportait toutes les bêtes au retour des pâturages à la fin de la saison. Dans une telle situation, la comptabilité peut être tenue en faisant une entaille sur une tige de bois pour chaque bête confiée au berger. Une méthode alternative consiste à mettre dans un sac un caillou pour chaque bête confiée au berger. Pour éviter les conflits, il est prudent de faire authentifier le contenu par une tierce personne à qui le sac est confié. Au retour de pâturages, il est alors facile de faire les vérifications sans qu'il existe un mot pour désigner le nombre de bêtes. Ces deux types de numération sont appelées « numérations concrètes ». Les quantités ne sont pas désignées par un nombre mais par une collection d'objets concrets, les entailles ou les cailloux.

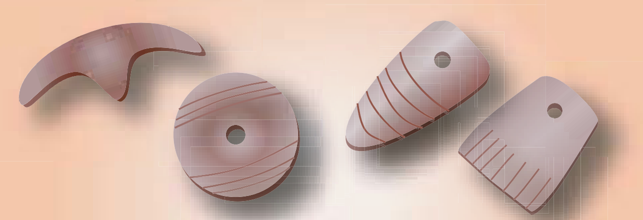
JETONS-CALCULI

Les premières sociétés agraires ont vu le jour dans la région du Croissant fertile (voir carte, figure 2), les populations vont y trouver à se nourrir sans avoir à se déplacer au gré des saisons. C'est une région où les précipitations annuelles sont supérieures à 200 mm de pluie, où poussent le blé et l'orge sauvages et où il y a beaucoup de moutons et de chèvres sauvages. C'est la production et le contrôle de surplus agricoles qui constituaient les fondements et la richesse de ces sociétés. Leur fonctionnement nécessitait un système de gestion complexe. L'accumulation, le contrôle et le commerce de ces surplus nécessita le développement de métiers spécialisés : architectes, ouvriers, soldats, etc., et l'établissement de modes de rémunération. Les excédents de production sont utilisés pour acquérir des biens en provenance de régions éloignées et pour ériger des monuments, des fortifications, etc. Les échanges commerciaux, la comptabilité des récoltes, la rémunération des soldats et des ouvriers nécessitaient l'utilisation de systèmes de gestion et de numération dont les sociétés de chasseurs-cueilleurs n'avaient pas besoin.

Les premières sociétés implantées dans la région du Croissant fertile ont utilisé une numération concrète en confectionnant des « jetons-calculi » en argile crue ou en terre cuite. Il a cependant fallu adapter cette forme de numération aux impératifs des échanges commerciaux.

Les échanges entre régions éloignées impliquent que l'on confie des marchandises à des gens qui s'occupent du transport. Comment s'assurer que toutes les marchandises confiées au chef de la caravane arriveront à destination ? Comment s'assurer qu'une partie des biens ne sera pas détournée ou perdue? Les découvertes archéologiques ont permis de constater que deux modes d'utilisation des jetons-calculi ont été développés.

La première méthode est celle des jetons striés et perforés qui pouvaient être enfilés sur une ficelle (figure 1). Les jetons étaient confiés au responsable du transport qui remettait ceux-ci au destinataire. La forme des jetons informait le destinataire sur la nature des produits expédiés et le nombre de stries sur leur quantité. Cette forme de comptabilité a évolué vers une représentation bidimensionnelle des jetons-calculi sur des tablettes d'argile.



Certains jetons ont une forme identifiable. On pense que le jeton de gauche représentait un bœuf. On retrouve ce type de jeton dans des bulles-enveloppes. Les autres jetons étaient probablement enfilés sur une corde

Figure 1 : Reproduction de jetons-calculi en terre cuite (~3 200)

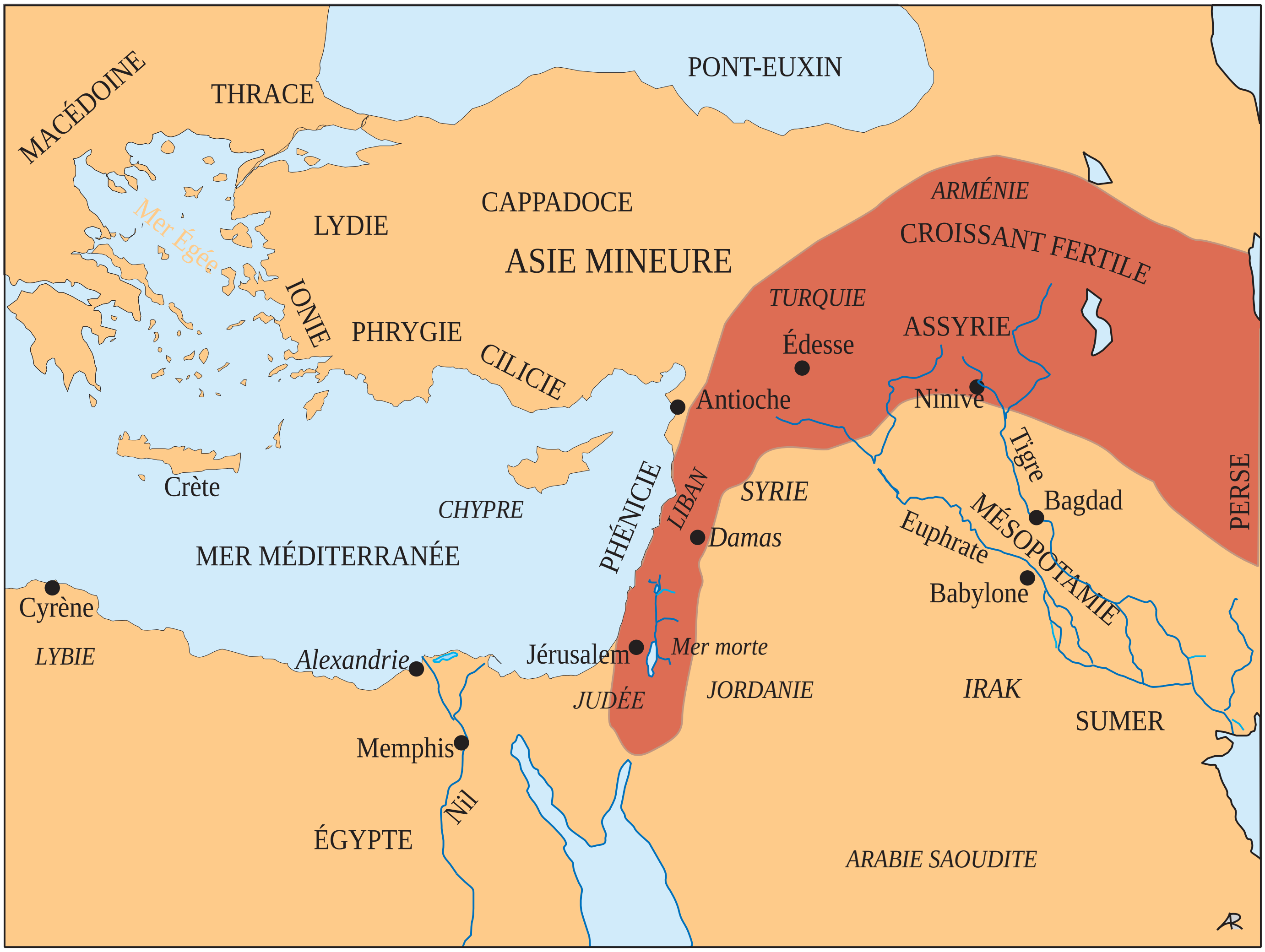


Figure 2 : Carte du Proche-Orient, le croissant fertile (noms modernes en italique)

L'autre méthode consiste à placer des jetons-calculi dans une bulle-enveloppe d'argile. La bulle-enveloppe est une sphère d'argile séchée dans laquelle on enferme des jetons-calculis. Elle est cachetée par le déroulement d'un sceau cylindrique qui laisse son empreinte à la surface. La bulle-enveloppe est également utilisée pour sceller les termes d'une entente ou d'un contrat entre deux personnes. Ces bulles ne sont pas cuites de telle sorte que le destinataire puisse l'ouvrir et en vérifier le contenu.

Un des inconvénients de la bulle est le fait que pour vérifier son contenu il faut la briser. Pour pallier à cet inconvénient, on a commencé à laisser sur la surface des bulles-enveloppes une empreinte des jetons-calculi qu'elle contenait. On s'est alors rapidement rendu compte qu'il était superflu de sceller les jetons-calculi dans une bulle. Il suffisait d'indiquer ce nombre sur une tablette d'argile. L'information est alors directement accessible. Pour garantir l'information imprimée sur la tablette, celle-ci est marquée d'un sceau, qui peut être celui de l'expéditeur ou du témoin de l'entente.

La nécessité de représenter de grands nombres a incité les utilisateurs à concevoir des jetons-calculi qui représentaient plusieurs unités d'un même produit. Ainsi, on utilisa un petit cône pour désigner l'unité et une petite bille pour représenter un regroupement de dix unités, un grand cône pour représenter un regroupement de 60 unités et un grand cône perforé pour représenter 60 ¥ 10 unités. Il devint alors possible de représenter de plus grand nombres sans avoir à reproduire plusieurs fois le même symbole. Le tableau de la figure 5 donne différentes formes de jetons-calculi et la valeur numérique représentée.

Dans une telle représentation, le nombre se dissocie graduellement des objets dénombrés et développe une existence propre. La notion de base d'un système de numération apparaît graduellement. Ce système est basé sur un regroupement par 10 et par soixante. Il comporte donc deux bases. L'écriture des nombres par l'empreinte de jetons-calculi sur une bulle-enveloppe ou une tablette d'argile se distingue des entailles sur les tiges ou sur les os par le fait que sont apparus des symboles pour représenter des quantités différentes de l'unité.

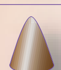
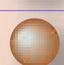
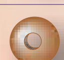
DES CALCULIS À LA NUMÉRATION CUNÉIFORME		
Jetons-calculi en terre Numération concrète	**Numération en écriture cunéiforme**	**Valeur numérique**
Petit cône 		**1**
Bille 		**10**
Grand cône 		**10×6 = 60**
Grand cône perforé 		**10×6×10 = 600 = 60×10**
Sphère 		**10×6×10×6 = 3 600 = 60^2**
Sphère perforée 		**10×6×10×6×10 = 36 000 = 60^2×10**
		**10×6×10×6×10×6 = 216 000 = 60^3**
Milieu de IV^e millénaire	**Vers ~2650**	

Figure 3 : Représentation des nombres, numération concrète et écriture cunéiforme.

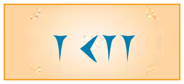
ÉCRITURE CUNÉIFORME

Nos sources de renseignements sur les mathématiques babyloniennes sont essentiellement les tablettes d'argile retrouvées lors de fouilles archéologiques entreprises au XIX^e siècle. L'empreinte obtenue en enfonçant un objet dans l'argile est la méthode la plus simple d'y faire une marque et, surtout, d'avoir une marque dont la forme sera toujours facilement reconnaissable. Les tablettes d'argile étaient gravées à l'aide d'un calame, tige de roseau biseautée. L'empreinte du calame donne un « coin », du latin *cuneus*, d'où l'appellation d'écriture cunéiforme. Selon l'orientation du calame, le coin sera vertical, oblique ou horizontal. On peut faire varier la forme du coin en enfonçant plus ou moins profondément le calame dans l'argile et en modifiant l'angle selon lequel celui-ci est enfoncé. On peut également modifier la forme par une rotation du poignet en enfonçant le calame. Ces tablettes, après avoir été gravées, étaient cuites, ce qui les a rendu très résistantes et leur a permis de défier le temps.

Parmi le demi-million de tablettes retrouvées, une centaine portent sur les mathématiques. Les tablettes mathématiques comportent des séries de nombres, des relations géométriques et des listes de problèmes. Elles comportent des tables de multiplication, des nombres et leur réciproque, des carrés et des cubes de nombres ainsi que quelques relations numériques comportant des exposants.

SYSTÈME DE NUMÉRATION

L'écriture cunéiforme des nombres va évoluer pour ne retenir que deux des symboles apparaissant à la figure 5. Le symbole  pour représenter l'unité et qui peut être répété jusqu'à neuf fois. Le symbole  pour représenter dix et qui peut être répété jusqu'à cinq fois. Les symboles sont groupés en paquets. Chaque paquet peut représenter les nombres de 1 à 59. Un nombre supérieur à 59 est représenté par une succession de paquets séparés par un espace et dont la valeur dépend de la position dans le nombre. La valeur du paquet dépend de deux choses : le nombre de fois que les symboles  et  sont répétés dans le paquet et la puissance de 60 correspondant à la position du paquet dans le nombre. Chaque paquet a donc une valeur interne et une valeur de position. Ainsi, le nombre



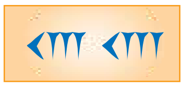
est constitué de deux paquets. La valeur interne du paquet de gauche est 1 et sa valeur de position est 60. La valeur interne du paquet de droite est 12, sa valeur de position est 1. Le nombre est donc :

1¥60 + 12 = 72.

Pour représenter le nombre

793 = 13¥60 + 13,

on écrit :



Pour représenter le nombre

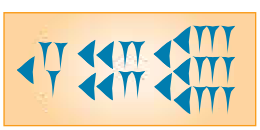
45 082 = 12¥60^2 +31¥60 + 22,

on écrit :

Le système babylonien est à la fois un système positionnel à base 60 et un système additif à base 6 et 10. C'est un système positionnel à base 60 puisque la valeur d'un paquet de symboles est donnée par la puissance de 60 correspondant à la position du paquet dans le nombre. Cependant, les paquets sont constitués de regroupements par 6 et par 10 dont la valeur interne est obtenue par le nombre de fois que les symboles sont répétés.

Exemple

Écrire en décimal le nombre :



Solution

Le nombre comporte trois regroupements. Les nombres écrits dans ces regroupements sont, à partir de la gauche, 13, 44 et 59. En tenant compte de la valeur de position de ces regroupements, on a alors :

13 ¥ 60^2 + 44 ¥ 60^1 + 59 ¥ 60^0

Cela donne :

13 ¥ 3600 + 44 ¥ 60 + 59 = 49 499

Le nombre représenté est 49 499.

Exemple

Écrire en sexagésimal, écriture cunéiforme, le nombre 33 333.

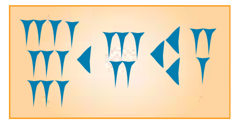
Solution

Pour écrire ce nombre en sexagésimal, il faut d'abord l'exprimer avec les puissances de 60. On obtient alors :

33 333 = 9 ¥ 3600 + 15 ¥ 60 + 33

= 9 ¥ 60^2 + 15 ¥ 60^1 + 33 ¥ 60^0

En écriture cunéiforme, on a alors :

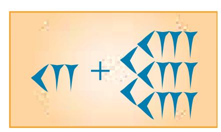


OPÉRATIONS

Les opérations dans un tel système de numération ne sont pas toutes faciles à effectuer. Pour additionner, il faut réunir les symboles d'un même regroupement, en commençant par la droite. Puis, si cela est nécessaire on réduit, c'est à dire que l'on remplace un paquet de 10 symboles de l'unité, , par un symbole de la dizaine, dans le même regroupement. De plus, un paquet de dix symboles est remplacé par un symbole dans le regroupement supérieur.

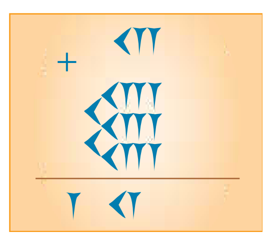
Exemple

Effectuer l'addition suivante :



Solution

En disposant les nombres en colonne, on a :

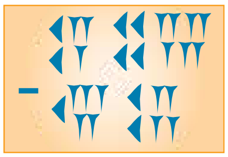


En réunissant les symboles de l'unité, on obtient un symbole plus un paquet de dix que l'on remplace par un symbole . On obtient alors un symbole plus un paquet de six symboles . Ce paquet est remplacé par un symbole de l'unité dans le regroupement supérieur.

Pour soustraire, on retranche des symboles en commençant par les regroupements de droite et si cela s'avère nécessaire, on remplace un symbole 𒌋 par un paquet de dix symboles dans le même regroupement ou un symbole par un paquet de six symboles 𒌋 dans le regroupement immédiatement à droite.

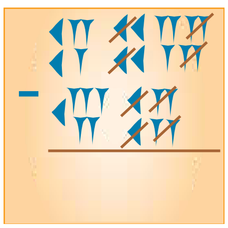
Exemple

Effectuer la soustraction suivante :

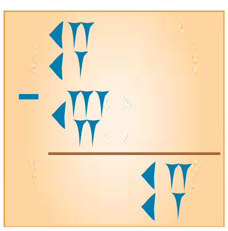


Solution

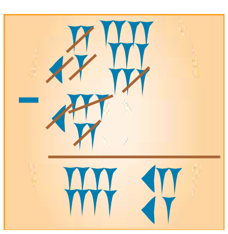
On peut, dans le regroupement de droite, retrancher les symboles sans avoir à faire de remplacement. Cela donne :



On note alors les symboles qui restent dans ce premier regroupement, cela donne :



Dans le deuxième regroupement, il y a plus de symboles 𒁹 dans le nombre à soustraire. On remplace donc un symbole 𒌋 par dix symboles 𒁹. Puis on retranche les symboles qui se répètent et on note ce qui reste. On a alors :



Le nombre obtenu est :

8¥60 + 23 = 503

Pour effectuer des multiplications, il faut avoir recours à des tables gravées sur des tablettes d'argile, ce qui alourdit beaucoup le sac de l'écolier. La table de multiplication par 9 reproduite à la figure 6 illustre bien le système de numération. On remarque la façon dont 54 et 63 sont représentés. Le symbole 𒌋 est répété cinq fois dans la représentation du nombre 54. Le nombre 63 s'écrit 60 + 3. On utilise le symbole de l'unité pour représenter une fois 60, on laisse un espace blanc pour qu'il n'y ait pas de confusion et on répète le symbole de l'unité trois fois. On remarque également dans cette table la façon dont sont représentés les nombres 126, 135 et 144 qui illustrent bien le système en base 60.

Table de multiplication par 9 en écriture cunéiforme

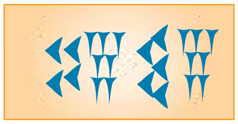
1			9
2			18
3			27
4			36
5			45
6			54
7			63
8			72
9			81
10			90
11			99
12			108
13			117
14			126
15			135
16			144

Figure 4 :Table de multiplication

On peut effectuer des divisions simples en regroupant ou partager les symboles en remplaçant éventuellement un symbole par son équivalent.

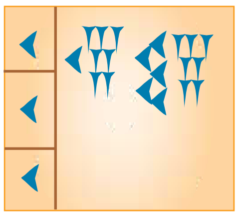
Exemple

Répartir en trois le nombre suivant :

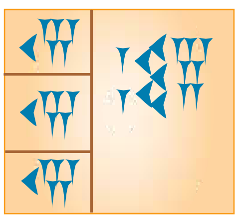


Solution

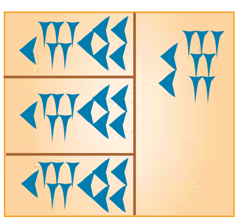
Dans le regroupement supérieur, il y a quatre symboles , on peut en répartir trois.



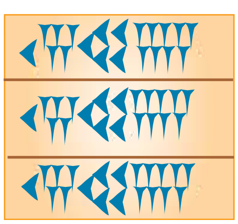
Le symbole est remplacé par dix symboles . En répartissant ces symboles, il en reste deux.



Chaque symbole est remplacé par six symboles dans le regroupement de moindre puissance. Après répartition des symboles de cette forme il en reste 2.



Chaque symbole est remplacé par dix symboles . En répartissant les symboles de cette forme, on obtient :



La division effectuée est 2877 divisé par 3 et on a obtenu 959.

Malgré la lourdeur de leur système de numération, les scribes babyloniens utilisaient une procédure par approximations successives, qui peut se poursuivre indéfiniment, pour calculer la racine carrée d'un nombre. Sur une tablette conservée à Yale, on retrouve une expression qui en écriture moderne donne :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414212963$$

Les listes de problèmes consignées sur les tablettes servaient aux scribes qui, lorsqu'ils avaient à résoudre un problème, cherchaient dans les listes un problème analogue. Parmi les problèmes consignés, citons les deux suivants :

Trouver la longueur du côté d'un carré dont l'aire moins le côté donne 870.

En écriture algébrique moderne, ce problème consiste à résoudre l'équation quadratique :

$$x^2 - x = 870$$

La somme de deux carrés donne 21,15 et le côté de l'un est plus petit de 1/7 que le côté de l'autre.

Ce qui équivaut à résoudre le système :

$$x^2 + y^2 = 21,15$$

$$y = \frac{6}{7}x$$

Les connaissances arithmétiques des babyloniens étaient utilisées dans différents sphères d'activité comme le commerce, les contrats, le calcul d'intérêts, le système de poids et de mesure et le calendrier.

SYSTÈME DE NUMÉRATION MAYA

Nous verrons maintenant le système de numération maya qui est également un système mixte. Les Mayas n'utilisaient que trois symboles dans un système à la fois positionnel dont les paquets (en niveaux) représentent des puissances de 20 et additif car dans un même paquet, les regroupements se font par 5 et par 4. les L'unité était représentée par un point, cinq unités par une barre et une coquille représentait le zéro. Il est remarquable que les Mayas aient utilisés un zéro dont l'usage était, à la même époque, inconnu de la plupart des civilisations.

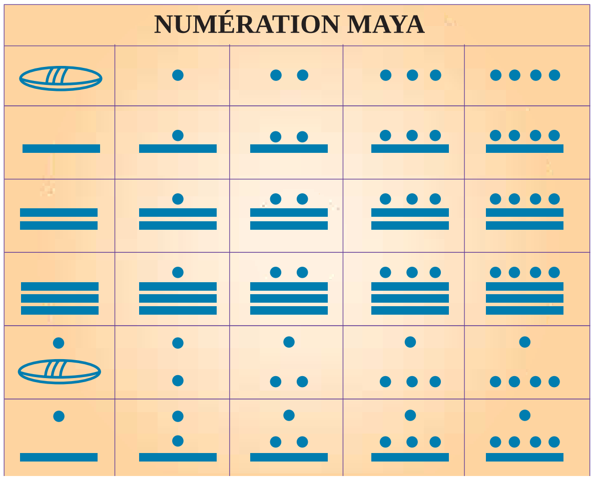


Figure 9 : Numération maya

Dans les regroupements de symboles, les points étaient disposés à l'horizontale et les barres étaient empilées verticalement. Dans les regroupements comportant des barres et des points, les barres sont disposées sous les points. Le tableau de la figure 11 donne l'écriture des nombres de 0 à 29.

L'écriture des nombres se fait verticalement et la valeur de position des regroupements de symboles dépend de leur position dans cet arrangement vertical.

Exemple

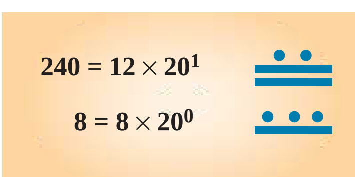
Écrire le nombre 248 en numération maya :

Solution

En exprimant 248 comme somme de puissances de 20, on a :

$$248 = 12 ¥ 20^1 + 8 ¥ 20^0$$

En écriture maya, on a alors :



Lorsqu'un niveau est vide (le coefficient de la puissance est nul), on utilise le coquillage pour marquer ce vide comme dans l'exemple suivant.

Exemple

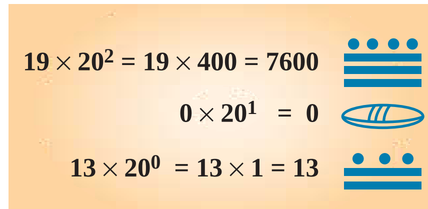
Écrire le nombre 7613 en numération maya.

Solution

En exprimant 7613 comme somme de puissances de 20, on a :

$$7613 = 19 ¥ 20^2 + 19 ¥ 20^1 + 13 ¥ 20^0$$

En écriture maya, on a alors :

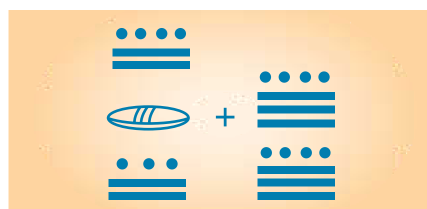


OPÉRATIONS

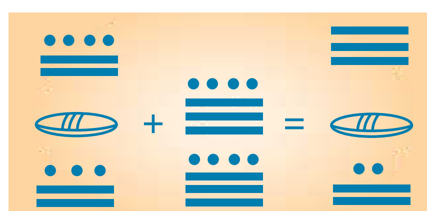
En additionnant, on remplace cinq points par une barre et on remplace trois barres et cinq points (ou quatre barres) par un point dans le regroupement immédiatement supérieur.

Exemple

Additionner les nombres suivants :



Solution



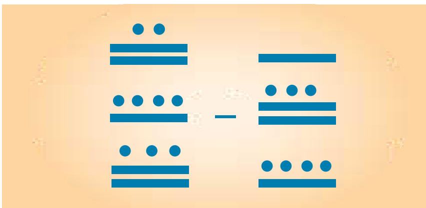
Dans cet exemple, on a effectué l'addition suivante :

$$5613 + 399 = 6012.$$

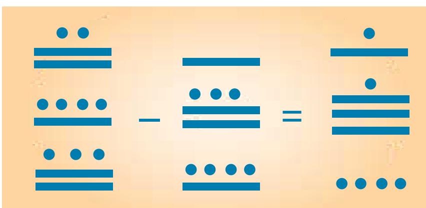
Pour la soustraction, on procède à l'inverse en empruntant. Lorsqu'on emprunte à l'intérieur d'un regroupement, on convertit une barre en cinq points. Lorsqu'on emprunte dans le regroupement immédiatement supérieur, on convertit un point en quatre barre ou en cinq points et trois barres.

Exemple

Effectuer la soustraction suivante :



Solution



Dans cet exemple, on a effectué la soustraction :

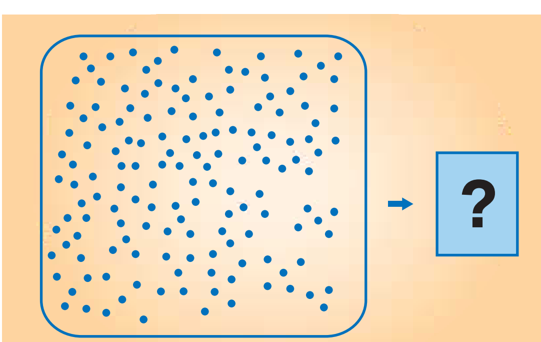
4993 – 2269 = 2724

DÉNOMBREMENT

Pour déterminer un nombre d'objets dans ce système, il faut d'abord regrouper en paquets de cinq, puis de 4. On regroupe alors les paquets, à nouveau par cinq puis par 4, ainsi de suite.

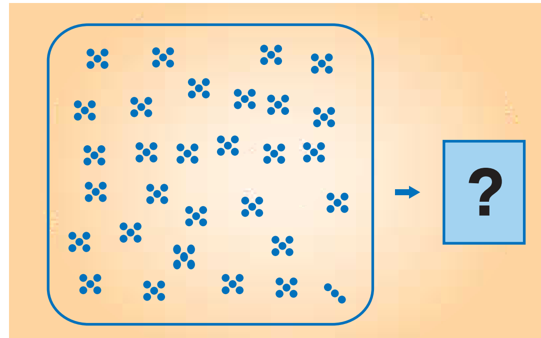
Exemple

En procédant par regroupements successifs, dénombrer les points de l'illustration suivante et indiquer ce nombre dans la case prévue à cet effet.

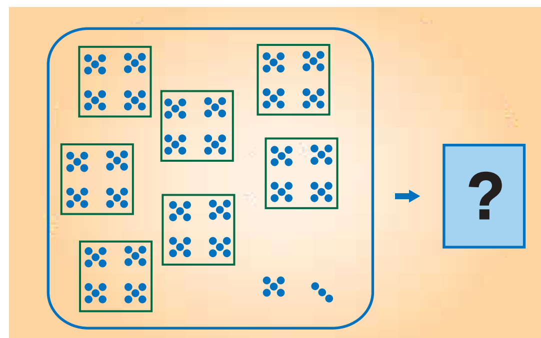


Solution

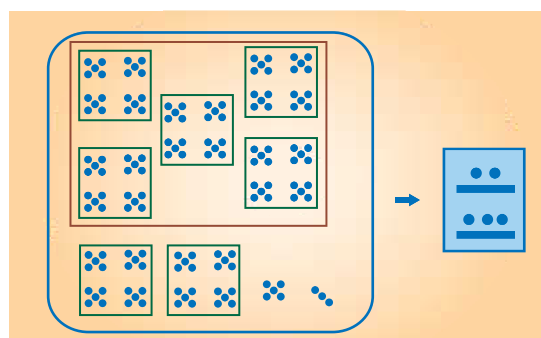
Regroupons d'abord les points par cinq, on obtient alors :



On regroupe alors ces paquets de cinq par paquets de 4 et on obtient :



On peut faire un regroupement par cinq à nouveau et cela donne :



Le nombre obtenu indique, dans le niveau supérieur, qu'il y a 7 paquets de 20 points plus 8 points.

Dans le système maya, comme dans le système babylonien on peut déterminer le plus grand de deux nombres en comparant simplement les regroupements de même puissance de la base.

On peut également procéder comme dans le système babylonien pour effectuer des répartitions ou divisions en trois, en quatre, etc. Cependant, les divisions par de grands nombres ne sont pas simples à effectuer dans de tels systèmes. C'est une faiblesse importante de ces systèmes et probablement une des raisons pour lesquelles ils ont disparu.

Pendant que les Mayas utilisaient ce système, les Européen utilisaient le système romain qui était beaucoup plus compliqué à utiliser. Le système de numération maya était à la portée de tous les membres de la société, même les analphabètes. Sur la place du marché, des bâtons et des petit cailloux ou des petits os et des fèves pouvaient être utilisés pour représenter les nombres et effectuer les transactions.

CONCLUSION

Le développement d'un système d'écriture des nombres a été une nécessité pour toutes les civilisations. Le partage des terres, des ressources, des revenus, la rémunération des ouvriers et des soldats, les échanges commerciaux, les contrats, le partage de l'héritage sont quelques-unes des situations nécessitant l'écriture des nombres.

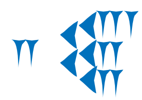
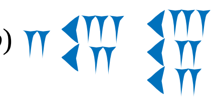
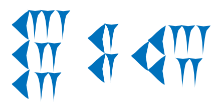
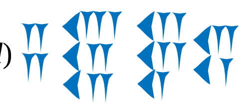
La diversité des systèmes de numération développés dans l'histoire illustre la créativité dont ont fait preuve les porteurs du savoir. On peut difficilement avoir des certitudes quant aux raisons qui ont mené au choix de la base et de la structure à la fois additive et positionnelle du système babylonien et du système maya.

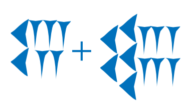
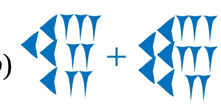
On peut faire l'hypothèse que le support de l'écriture et les contraintes qu'il pose ont influencé ce développement. Ainsi, le scribe babylonien écrivait en imprimant le calame dans l'argile. Ce support et cet instrument d'écriture ne se prêtent pas facilement à l'utilisation d'un grand nombre de symboles. Une grande partie des documents mayas qui nous sont parvenus sont sculptés dans la pierre. Cette technique d'écriture non plus ne se prête pas facilement à la reproduction d'un grand nombre de symboles, pas plus que l'écriture dans l'argile.

Chacun de ces systèmes a été peaufiné par les scribes et les prêtres pour en simplifier l'utilisation, mais aucun ne pouvait parvenir à la versatilité du système positionnel de base 10 qui viendra des Indes et sera perfectionné par les Arabes avant de s'implanter en Europe.

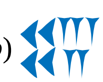
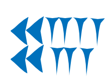
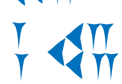
EXERCICES 01

1. Exprimer les nombres suivants en écriture cunéiforme.
   a) 14 *b*) 21
   c) 39 *d*) 397
   e) 532 *f*) 2 534

2. Exprimer les nombres suivants dans le système décimal moderne.
   a)  *b*) 
   c)  *d*) 

3. Effectuer les additions suivantes en écriture cunéiforme et traduire le résultat en écriture moderne.
   a)  *b*) 

4. Construire la table de multiplication par 8 des nombres de 1 à 16 en écriture cunéiforme.

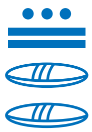
5. Donner, dans le système babylonien, les 3 premiers nombres obtenus en doublant successivement les nombres suivants. Traduire les résultats en écriture moderne.
   a)  *b*) 
   c)  *d*) 

6. Exprimer les nombres suivants en écriture maya.
   a) 14 *b*) 21
   c) 39 *d*) 397
   e) 532 *f*) 2 534

7. Exprimer les nombres suivants dans le système décimal moderne.

a) 

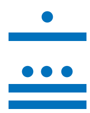
b) 

c) 

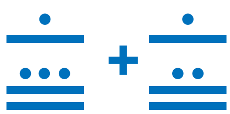
d) 

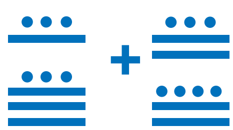
8. Donner, dans le système maya, les 3 premiers nombres obtenus en doublant successivement les nombres suivants :

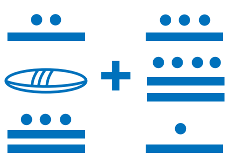
a) 

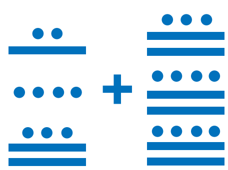
b) 

9. Effectuer les additions suivantes dans le système maya. Traduire les résultats en écriture moderne.

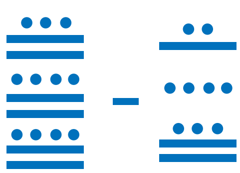
a) 

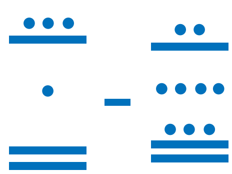
b) 

c) 

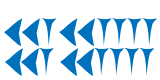
d) 

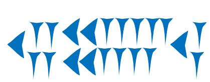
10. Effectuer les additions suivantes dans le système maya. Traduire les résultats en écriture moderne.

a) 

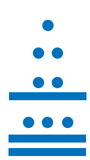
b) 

11. Répartir en trois les nombres suivants :

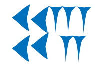
a) 

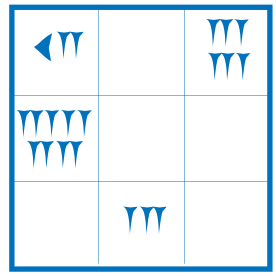
b) 

c) 

d) 

12. Compléter les cases du damier suivant de telle sorte que la somme des nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale soit égale à :





13. Qu'est-ce qu'un système de numération mixte?

14. Pourquoi dit-on que le système babylonien est un système mixte à structure positionnelle de base 60 et à structures additives de bases 10 et 6?

15. Pourquoi dit-on que le système maya est un système mixte à structure positionnelle de base 20 et à structures additives de bases 5 et 4?

16. On a découvert un système de numération mixte à structure positionnelle de base 12 et à structures additives de bases 4 et 3 dont les symboles sont les suivants :

○ , pour zéro;
● , pour l'unité;
| , pour un paquet de 4.

L'écriture des nombres se fait de gauche à droite comme dans le système babylonien.

a) Écrire les nombres 347 et 2534 dans ce système de numération.

b) Écrire dans le système décimal les nombres suivants :